Correction de l'examen du 12 janvier 2012

Exercice 1. (**Questions de cours**)

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable. La matrice jacobienne de f au point $x \in \mathbb{R}^n$ est définie par
$$J(f)(x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$
si $f = (f_1, \dots, f_n)$, avec pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la j-ème fonction coordonnée de f.
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $x \in \mathbb{R}^n$. La différentielle seconde de f au point x vérifie
$$\forall h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad d^2 f_x(h,h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j = {}^t h H(f)(x) h$$
avec $H(f)(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice hessienne de f au point x.
3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si x_0 est un extremum local de f sur $\mathbb{R}^n$, alors $df_{x_0} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}$ (ce qui est équivalent à $\nabla f(x_0) = 0_{\mathbb{R}^n}$).
4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et x_0 un point critique de f. Si f est convexe sur $\mathbb{R}^n$, alors x_0 est un point de minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque. La question 4. demandait une condition suffisante d'**ordre** 1 pour l'existence d'un minimum **global** : il aurait été faux de considérer la matrice hessienne et son caractère défini positif pour pour répondre à cette question car f n'est pas supposée de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ et dans le cas où elle le serait, si $H(f)(x_0)$ était définie positive, alors x_0 serait un point de minimum *local* de f sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2.

1. L'application linéaire A est alors donnée par
$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad A(x) = (x_1, 5x_1 + x_2).$$
Soit $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On obtient les équivalences suivantes :
$$A(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcccc} x_1 & & & = & y_1 \\ 5x_1 & + & x_2 & = & y_2 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, x_2) = (y_1, y_2 - 5y_1).$$
Par conséquent, A est inversible et A^{-1} est donnée par
$$\forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad A^{-1}(y) = (y_1, y_2 - 5y_1).$$
2. (a) Soit $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Par définition, $\|A^{-1}(y)\|_\infty = \max(|y_1|, |y_2 - 5y_1|)$. Or, par inégalité triangulaire, $|y_2 - 5y_1| \leq |y_2| + 5|y_1| \leq 6\|y\|_\infty$ et puisque $|y_1| \leq 6\|y\|_\infty$, on trouve $\|A^{-1}(y)\|_\infty \leq 6\|y\|_\infty$. Ainsi, on a prouvé l'inégalité $\|A^{-1}\| \leq 6$.
   (b) Pour $y = (1, -1)$, on a $\|y\|_\infty = 1$ et $A^{-1}(y) = (1, -6)$ d'où $\|A^{-1}(y)\|_\infty = 6$.
   Par conséquent, $\|A^{-1}\| = 6$.
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par
$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x) = \left(\frac{x_1}{8}, \frac{\cos^2 x_2}{7}\right).$$
   (a) On pose pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_1(x) := \frac{x_1}{8}$ et $\varphi_2(x) := \frac{\cos^2 x_2}{7}$.
   Puisque φ_1 est polynomiale, alors φ_1 est de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ et φ_2 est la composée des applications $x \mapsto x_2$ et $t \mapsto \frac{\cos^2 t}{7}$ qui sont de classe C^1 respectivement de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ donc par composition, φ_2 est de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.
   Or, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ donc φ est de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

1. thai@math.jussieu.fr

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Un calcul de dérivées partielles de φ au point x nous permet d'avoir que

$$J(\varphi)(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{2\sin x_2 \cos x_2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{\sin(2x_2)}{7} \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors la différentielle de φ au point x :

$$\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2, \quad d\varphi_x(h) = \left(\frac{h_1}{8}, \frac{-\sin(2x_2)}{7} h_2 \right).$$

Fixons $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\|d\varphi_x(h)\|_\infty = \max\left(\frac{|h_1|}{8}, \frac{|\sin(2x_2)|}{7} |h_2| \right)$.
Or, $\frac{|\sin(2x_2)|}{7}|h_2| \leq \frac{|h_2|}{7}$ car $|\sin(2x_2)| \leq 1$ d'où $\frac{|\sin(2x_2)|}{7}|h_2| \leq \frac{1}{7}\|h\|_\infty$, et (puisque $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{7}$!), on a $\frac{|h_1|}{8} \leq \frac{1}{7}\|h\|_\infty$ et finalement, on obtient $\|d\varphi_x(h)\|_\infty \leq \frac{1}{7}\|h\|_\infty$.
Par conséquent, on trouve l'inégalité

$$\|d\varphi_x\| \leq \frac{1}{7}.$$

4. Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}^2$. Puisque φ est de classe C^1 sur l'ouvert convexe $\mathbb{R}^2$, l'inégalité des accroissements finis donne

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_\infty \leq \sup_{u \in [x,y]} \|d\varphi_u\| \|x - y\|_\infty.$$

Or, d'après 3., on obtient

$$\sup_{u \in [x,y]} \|d\varphi_u\| \leq \frac{1}{7}$$

d'où

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_\infty \leq \frac{1}{7} \|x - y\|_\infty.$$

Ainsi, φ est lipschitzienne de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Lip}(\varphi) \leq \frac{1}{7}$.

5. On applique le théorème d'inversion globale : d'après 1., A est une application linéaire inversible de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ et d'après 3. et 4., φ est une application de classe C^1 et lipschitzienne de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ avec

$$\mathrm{Lip}(\varphi) \leq \frac{1}{7} < \frac{1}{6} = \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Le théorème d'inversion globale nous assure que $A + \varphi$ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^3,\ 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 = 10\}$ et on considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Posons $g(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 10$ pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrons que $\mathcal{E}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$. En effet, $\mathcal{E}$ est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (car polynomiale).
Montrons que $\mathcal{E}$ est borné dans $\mathbb{R}^3$. Puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, les normes sur $\mathbb{R}^3$ sont équivalentes et le caractère borné est donc indépendant du choix de la norme. Il suffit alors de prouver que $\mathcal{E}$ est borné pour la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. En effet, si $x \in \mathcal{E}$, on a $\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 = 10$ d'où $\|x\|_2 \leq \sqrt{10}$.

2. L'espace $\mathbb{R}^3$ étant de dimension finie, $\mathcal{E}$ est un compact de $\mathbb{R}^3$ car d'après 1. c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^3$. De plus, l'application f est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^3$, et *a fortiori* sur le compact $\mathcal{E}$ donc f est bornée et atteint ses bornes sur $\mathcal{E}$. En particulier, f admet un maximum global sur $\mathcal{E}$.

3. Soit x un point de maximum global de f sur $\mathcal{E}$. On veut appliquer le théorème sur les multiplicateurs de Lagrange : l'application g étant polynomiale, on a que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et on peut écrire $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^3,\ g(x) = 0\}$. De plus, on constate que $\nabla g(x) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ car $\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 8x_2 \\ 6x_3 \end{pmatrix}$ ne s'annule qu'en

$(0,0,0)$ qui n'appartient pas à $\mathcal{E}$.
On observe que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ (car polynomiale) donc on peut désormais appliquer le théorème sur les multiplicateurs de Lagrange : il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$, ce qui est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 4\lambda x_1 & = & 0 \\ 2x_2 & + & 8\lambda x_2 & = & 0 \\ 2x_3 & + & 6\lambda x_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcll} (1+2\lambda)x_1 & = & 0 & (1) \\ (1+4\lambda)x_2 & = & 0 & (2) \\ (1+3\lambda)x_3 & = & 0 & (3) \end{array}\right.$$

On distingue alors plusieurs cas.

(a) Cas 1 : $\lambda = -\frac{1}{2}$. Les équations (2) et (3) donnent alors $x_2 = x_3 = 0$ donc $x = (x_1, 0, 0)$.

(b) Cas 2 : $\lambda = -\frac{1}{4}$. Les équations (1) et (3) deviennent $x_1 = x_3 = 0$, soit $x = (0, x_2, 0)$.

(c) Cas 3 : $\lambda = -\frac{1}{3}$. Les équations (1) et (2) fournissent $x_1 = x_2 = 0$, d'où $x = (0, 0, x_3)$.

(d) Cas 4 : $\lambda \neq -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Les équations (1), (2) et (3) donnent alors $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ mais $(0,0,0)$ n'appartient pas à $\mathcal{E}$.

Par conséquent, on en déduit que si x est un point de maximum global de f sur $\mathcal{E}$, x est sous la forme annoncée.

4. Soit x un point de maximum global de f sur $\mathcal{E}$. On utilise alors la question 2.

(a) Si $x = (x_1, 0, 0) \in \mathcal{E}$, on trouve $x_1 = \pm\sqrt{5}$ et $f(x) = 5$.

(b) Si $x = (0, x_2, 0) \in \mathcal{E}$, on a $x_2 = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ et $f(x) = \frac{5}{2}$.

(c) Si $x = (0, 0, x_3) \in \mathcal{E}$, on obtient $x_3 = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}$ et $f(x) = \frac{10}{3}$.

En comparant ces résultats, on trouve que $(\pm\sqrt{5}, 0, 0)$ sont les points de maximum global de f sur $\mathcal{E}$ et

$$\max_{\mathcal{E}} f = f(\pm\sqrt{5}, 0, 0) = 5.$$

5. Montrons que $\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R}^3,\ 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 \leq 10\}$ est un compact de $\mathbb{R}^3$.
Puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, il suffit de prouver que $\mathcal{F}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^3$. En gardant les mêmes notations que ce qui précède, on trouve que $\mathcal{F}$ est l'image réciproque du fermé $]-\infty, 0]$ de $\mathbb{R}$ par l'application g qui est continue de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{F}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$. De plus, si $x \in \mathcal{F}$, on a $\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 \leq 10$ d'où $\|x\|_2 \leq \sqrt{10}$.
L'application f étant continue sur $\mathbb{R}^3$, f est également continue sur le compact $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$ donc f admet un maximum global sur $\mathcal{F}$.

6. On constate que l'intérieur de $\mathcal{F}$ est égal à

$$\mathrm{Int}(\mathcal{F}) = \{x \in \mathbb{R}^3,\ 2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 < 10\}$$

alors que la frontière de $\mathcal{F}$ est égale à $\mathcal{E}$, et on peut écrire $\mathcal{F} = \mathrm{Int}(\mathcal{F}) \cup \mathcal{E}$. L'étude de f sur $\mathcal{E}$ étant l'objet des questions précédentes, on se ramène alors à étudier les extrema de f sur l'ouvert $\mathrm{Int}(\mathcal{F})$.

(a) On sait que pour qu'un point soit un extremum local d'une application différentiable sur un ouvert, il faut que ce soit un point critique de celle-ci. Puisque f est de classe C^1 sur $\mathrm{Int}(\mathcal{F})$, on peut étudier les points critiques de f sur l'ouvert $\mathrm{Int}(\mathcal{F})$. Un calcul de dérivées partielles montre que $(0,0,0)$ est le seul point critique de f sur $\mathrm{Int}(\mathcal{F})$.

(b) Nature de $(0,0,0)$: on constate que pour tout $x \in \mathrm{Int}(\mathcal{F})$, on a $f(x) \geq 0 = f(0,0,0)$ donc $(0,0,0)$ est un minimum global de f sur $\mathrm{Int}(\mathcal{F})$ mais $(1,0,0) \in \mathrm{Int}(\mathcal{F})$ et $f(1,0,0) = 1 > f(0,0,0)$ donc $(0,0,0)$ ne peut être un maximum global de f sur $\mathrm{Int}(\mathcal{F})$.

Par conséquent, le maximum global de f sur $\mathcal{F}$ est atteint sur $\mathcal{E}$ et d'après 4., $(\pm\sqrt{5}, 0, 0)$ sont les points de maximum global sur $\mathcal{F}$ et

$$\max_{\mathcal{F}} f = f(\pm\sqrt{5}, 0, 0) = 5.$$

Exercice 4. Soit K un compact convexe d'un espace vectoriel normé E et $f : K \to K$ une application telle que pour tout $(x, y) \in K \times K$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.
On fixe $a \in K$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$ pour tout $x \in K$.

1. Vérifions que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bien définie de K vers K.
   Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque f est une application de K vers K, alors si $x \in K$, $f(x) \in K$ et comme $a \in K$, $\frac{1}{n} \in [0,1]$, la convexité de K assure que $\frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) \in K$, d'où $f_n(x) \in K$.
2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une application contractante sur K.
   Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Soit x et y deux éléments de K. On obtient
   $$\|f_n(x) - f_n(y)\| = \left\|\left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(y)\right\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f(x) - f(y)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - y\|.$$
   Or, $n \in \mathbb{N}^*$ donc $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ d'où $0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$.
   Par conséquent, l'inégalité ci-dessus permet alors d'affirmer que f_n est une application contractante de K.
3. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble K étant compact, K est un espace métrique complet pour la distance induite par la norme sur E et f_n étant une application contractante sur K, on peut appliquer le théorème du point fixe de Picard : il existe un unique $x_n \in K$ tel que $f_n(x_n) = x_n$.
4. Puisque (x_n) est une suite d'éléments de K qui est compact, le théorème de Bolzano-Weierstrass nous assure que la suite (x_n) admet une sous-suite convergente dans K, ce qui justifie l'existence d'une suite strictement croissante $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ et de $x \in K$ tels que $x_{\varphi(n)} \to x$ lorsque n tend vers l'infini.
5. Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = f(x)$.
   En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a par inégalité triangulaire
   $$\|f(x) - f_p(x_p)\| \leq \|f(x) - f(x_p)\| + \|f(x_p) - f_p(x_p)\| \leq \|x - x_p\| + \frac{1}{p}\|f(x_p) - a\|.$$
   Si $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $p = \varphi(n)$ dans l'inégalité ci-dessus et on trouve
   $$\|f(x) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})\| \leq \|x - x_{\varphi(n)}\| + \frac{1}{\varphi(n)}\|f(x_{\varphi(n)}) - a\|.$$
   Par continuité de f (car f est lipschitzienne), on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(x)$ et puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(n) = +\infty$, on trouve $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\varphi(n)}\|f(x_{\varphi(n)}) - a\| = 0$.
   De plus, on sait que la suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers x dans K donc par théorème d'encadrement, on en déduit la limite voulue.
6. D'après 3., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$f(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}.$$
   Les questions 4. et 5. permettent de passer à la limite quand n tend vers l'infini, dans l'égalité ci-dessus, ce qui donne $f(x) = x$. Par conséquent, on vient de prouver que x est un point fixe de f dans K.